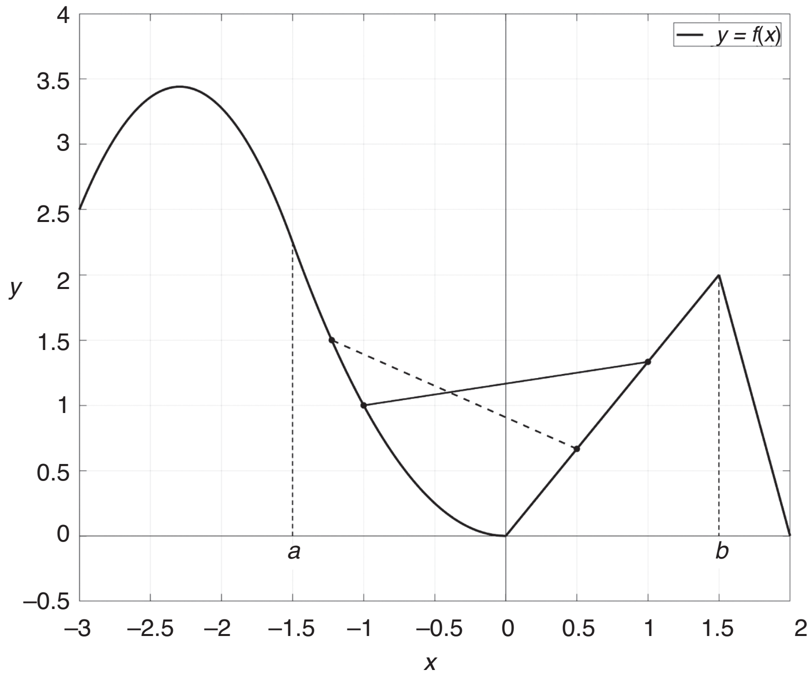

Figura 4.4 Esempio di una funzione di una variabile non differenziabile il cui grafico è sempre al di sotto del segmento che congiunge due punti appartenenti al grafico di f.

Dimostrazione. Siano x e y due punti qualsiasi in $\mathbb{R}^n$ e sia $\lambda \in [0,1]$. Dobbiamo far vedere che

$$f((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y),$$

dove $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione norma $\|.\|$, ossia gode delle proprietà (i)-(iv) definite nel secondo capitolo. Applicando le proprietà (iii)-(iv) delle norme, tenendo conto che $\lambda \in [0,1]$, possiamo scrivere

$$\|(1-\lambda)x+\lambda y\| \leq (1-\lambda)\|x\|+\lambda\|y\|,$$

il che prova la tesi. ■

Dalla definizione di funzione convessa si ottiene immediatamente quella di funzione concava.

Definizione 4.15 (Funzione concava, strettamente concava) *Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso e sia $f : C \to \mathbb{R}$. Si dice che f è* concava (strettamente concava) *su C se $-f$ è convessa (strettamente convessa) su C o, equivalentemente: f è* concava *su C se, comunque si fissino $x, y \in C$ si ha*

$$f((1-\lambda)x+\lambda y) \geq (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y),$$

per ogni λ tale che $0 \leq \lambda \leq 1$; f è strettamente concava *su C se, comunque si fissino $x, y \in C$ con $x \neq y$ si ha:*

$$f((1-\lambda)x+\lambda y) > (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y),$$

per ogni λ tale che $0 < \lambda < 1$.